

Implementácia učiva matematiky na 2. stupni ZŠ a pedagogický výskum v príprave učiteľov

Jaroslava Brincková¹

Abstract

The article is dealing with limit of influence of quality to understand to the mathematical problems or with the porter of information. If the source of it is a person approximately of equal age, society and intellectual level, this seemingly subjectless question has other important dimension. We investigate to what level is possible to express pretentions mathematical problems use that the children can understand them unformally. What kind of mistakes does the pupil make while understanding problems and why?

Pri stanovovaní profilu učiteľa matematiky pre 2. stupeň ZŠ na Pedagogickej fakulte UMB v Banskej Bystrici sme si položili otázku. Je súčasný absolvent učiteľstva matematiky pripravený v porovnaní so zahraničnými učiteľmi na:

- kvalitné prevádzanie didaktickej interpretácie matematických poznatkov,
- samostatné a efektívne projektovanie učiva,
- realizáciu nutných diagnostických meraní,
- ďalšie profesionálne vzdelávanie,
- konkurencioschopnosť s učiteľmi matematiky v ostatných krajinách?

Analýza odpovedí na predložený okruh otázok nás viedla k úprave obsahu vzdelávania v didaktike matematiky a v jej spojení s priebežnou a súvislou pedagogickou praxou. Neuspokojili sme sa s tým, že študentom povieme teóriu, ale tiež im ju sami ukážeme v praxi.

Výber typu činností vo vyučovacej hodine závisí na učiteľovom štýle vyučovania, na obsahu učiva, na požadovaných výsledkoch a na situácii žiakov v triede. V príspevku chceme popísať rámec použiteľný pre prípravu vyučovacej hodiny zameranej na riešenie matematických slovných úloh, v ktorej učiteľ prevádza diagnostické merania na odhaľovanie chýb, ktoré vznikajú v procese komunikácie učiteľ — žiak, žiak — žiak.

Matematické slovné úlohy

Problematika komunikácie na hodinách matematiky tak v slovnej, ako aj v písomnej podobe v textoch slovných úloh bola dlhé roky odsúvaná ako „nepodstatná“. Dôraz sa kládol predovšetkým na vedomosti a nie na spôsob ich získavania. Hlbšie skúmanie medzipredmetových vzťahov sa prejavilo v súčasnosti aj v pohľade na komunikáciu pri vyučovaní matematiky na 2. stupni ZŠ.

Slovné úlohy sa vo všeobecnosti pokladajú za problémové učivo u žiakov všetkých typov škôl. Nie sú však doménou len matematiky. **Matematické slovné úlohy** sú úlohy s matematickým obsahom. Sú súčasťou matematiky z odborného hľadiska. Sú súčasťou vzdelávania — majú dialektický aspekt. Zo systémového hľadiska definujú určitý systém, jeho prvky, väzby medzi nimi a problém, ktorý treba riešiť. Sú jazykovým prejavom a literárnym textom, pretože sú nositeľkami súvislej informácie o probléme. Tieto aspekty musí učiteľ vedieť zohľadniť pri

¹(brincka@pdf.umb.sk) Katedra matematiky PdF UMB, Ružová 13, Banská Bystrica, tel. (088)4364416, fax. (088)4364444

tvorbe, analýze a hodnotení matematických slovných úloh. Pristupovať k nim nie len z hľadiska didaktického, ale aj systémového a z hľadiska jazykového stvárnenia.

Formulácia úlohy vytvára vzťah k matematike a aj k materinskému jazyku a je priamo zodpovedná za vytváranie si predstavy o úlohe. Tieto úlohy prinášajú okrem informácie vecnej aj informáciu estetickú. Pôsobia na citovú a vôľovú stránku čitateľa. Púťavosť textu je priamo zodpovedná za chuť riešiteľa danú úlohu vyriešiť. V rámci literárnych textov radíme matematické slovné úlohy [MSU] do:

- vecnej literatúry,
- matematiky,
- učebnicovej literatúry.

Riešiteľský proces umožňuje využívať sociálny prístup k vyučovaniu matematiky. Dá sa *chápať ako dráma* v ktorej si žiak:

1. uvedomuje predpoklady úlohy,
2. usiluje sa o ich pochopenie,
3. zoznámi sa s problémom formulovaným v úlohe,
4. hľadá cesty od pochopenia k riešeniu,
5. vytvára si vlastný model,
6. rieši úlohu,
7. overuje jej riešenie,
8. koriguje prípadné chyby,
9. formuluje výsledok.

<i>Subjekt</i>	= ŽIAK	Objekt = ÚLOHA
<i>Prostriedky</i>	= zošit, tabuľa, kalkulačka, vzorce, ...	
<i>Podmienky</i>	= okolnosti riešenia úlohy, fyzický a psychický stav riešiteľa,	
<i>Činnosť subjektu</i>	= priebeh riešenia,	
<i>Činnosť a prejavy iných subj.</i>	= rada učiteľa, spolužiaka, ...	
<i>Expozícia</i>	= zoznámenie sa s prvkami a väzbami,	
<i>Kolízia</i>	= formulovanie a rozbor problému,	
<i>Kríza</i>	= rozhodnutie o metóde riešenia,	
<i>Peripetie</i>	= vlastné riešenie,	
<i>Katastrofa</i>	= formulácia výsledku.	

Zastávame názor, že aktívny sociálny prístup k stvárneniu matematických slovných úloh ich presúva do oblasti vysoko tvorivej činnosti a žiakov obohacuje o vnútornú skúsenosť s vnímaním textu slovnej úlohy. Pôsobí na nich silne motivačne. Abstraktné matematické pojmy sa stávajú zrozumiteľnejšie, ak sa vysvetľujú v súvislosti so životnými skúsenosťami žiakov. Medzi stupňom abstraktného myslenia a komunikačnými prostriedkami je tesná súvislosť. Abstraktná úroveň detského myslenia a jeho životné skúsenosti vylučujú možnosť pochopenia im neprimeraných pojmov, čo sa prejavuje napríklad v neschopnosti čítať s porozumením.

V komunikačnom modeli Učiteľ ↔ Žiak sa často vyskytujú situácie v ktorých:

- učiteľ si neuvedomí hranicu konkrétnosti a abstraktnosti a neschopnosť žiaka pochopiť výklad MSU priradí k jeho lenivosti,
- žiak vynakladá pri tom značnú časť svojej psychickej energie na porozumenie komunikácii a má málo času na spracovanie údajov, preto rezignuje,

- učiteľ na určitej úrovni vzdelávania nahradí matematický jazyk bežnou hovorovou rečou v ktorej žiaci lepšie chápu intuitívny význam pojmov, žiaci pracujú s väčšou chuťou.

Porozumením nazveme mieru zhody medzi predstavami autora MSÚ a riešiteľa. V prípade zhody vie riešiteľ vysvetliť každú myšlienku textu, povedať text vlastnými slovami a ovláda vhodný symbolický jazyk v ktorom vie modelovať vlastnú predstavu textu. Ak je miera zhody nízka, nastáva **komunikačný kolaps**. Žiaci naň reagujú tak, že chcú nevedomosť prekonať, prípadne hľadajú náhradné riešenie, napríklad opisujú, alebo rezignujú na prácu.

Pod pojmom **riešenie MSÚ** sa chápu dva významy. A to:

1. odpoveď na zadanú otázku,
2. postup, ktorý vedie k nájdeniu správnej odpovede.

My chápeme riešenie MSÚ v zmysle dva. **Proces riešenia MSÚ** rozdelíme na 6 etáp:

1. Zmocnenie sa úlohy
2. Prevedenie zadania do jazyka matematiky
3. Nájdenie riešiteľskej stratégie
4. Realizácia početných úkonov
5. Kontrola výsledku
6. Interpretácia výsledku

Najčastejšie chyby, ktorých sa riešiteľ dopúšťa sú podľa Hejného [3] chyby numerické, úkonové, grafické, veľké skoky a chyby strategické. Tieto môže učiteľ objaviť pri analýze písomných riešení úloh žiakmi.

Pedagogický výskum

Od školského roku 1998/99 sme pristúpili k prepojeniu vzdelávania v didaktike matematiky spolu s realizáciou priebežnej pedagogickej praxe vo 4. ročníku štúdia učiteľstva matematiky. Výskum sme zamerali na skúmanie:

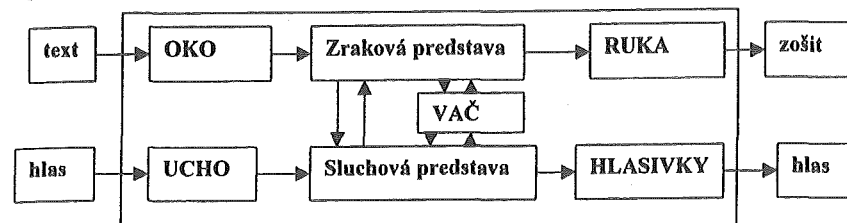
- schopnosti žiakov 6. ročníka ZŠ uchopiť matematický text pri riešení slovných úloh.
- vplyvu transformácie zadania textu slovných úloh na schopnosť uchopiť matematický text s porozumením.

Súčasne sme orientovali poznatky študentov učiteľstva matematiky a slovenského jazyka na intenzívnu prácu so žiakmi v rámci využitia poznatkov o medzipredmetových vzťahoch.

Podľa Gardnera [2] „... človek nespracúva informácie a neučí sa iba jedným spôsobom, alebo pomocou jedného typu inteligencie. Rodí sa s dispozíciami pre všetkých sedem typov inteligencie (jazyková, logická — matematická, telesná — pohybová, priestorová, muzikálna, intrapersonálna a interpersonálna). Len na prostredí v ktorom žije závisí, ktorá zložka sa dominantne rozvíja.“ Vo veku 11–12 rokov sa vo zvýšenej miere začína prejavovať dispozícia pre spracovanie informácií logickými postupmi a pre rozvoj jazykovej inteligencie. Žiaci sú schopní už vysvetliť učivo svojim spolužiakom v jazyku im primeranom, pričom sa stáva, že ich výklad je pre spolužiaka zrozumiteľnejší, ako výklad učiteľa.

Tradičné výskumné hodiny na ZŠ sú riadené učiteľom. Učiteľ pripraví otázky a činnosti, vopred vie k akému záveru deti dospejú. Ak máme študentom umožniť skutočne autentické učenie matematických slovných úloh, musia aspoň niektoré ich výskumné činnosti vyústiť do „skutočného výskumu“. Závety formulované z takto získaných údajov môžeme pokladať za ich indukčnú skúsenosť, ktorá sa odrazí napríklad pri tvorbe diplomových prác [4].

Pri tvorbe scenára experimentu sme vychádzali z komunikačného modelu transferu informácie. V tomto modeli sa zmočňuje matematickej slovnej úlohy čítaním, alebo počúvaním. Vid' obr. č. 1



VAČ — vzťahovo — abstrakčná činnosť, ktorú chápeme pod pojmom „logické myslenie“. Z obrázku je zrejmé, že **zmocniť** sa matematickej slovnej úlohy môže **žiak-riešiteľ** okom, alebo **uchom**, pričom text môže zostaviť **učiteľ**, alebo **spolužiak-řečník**.

Do experimentu sme zvolili tri typové matematické slovné úlohy tak, aby:

- nesprávne riešenie čiastkovej úlohy viedlo k tečeniu chyby, prípadne k zmene stratégie riešenia,
- zadanie úlohy napovedalo použitie matematickej operácie,
- zadanie doplnené obrázkom umožnilo protetické modelovanie.

1. **úloha:** V triede je 28 žiakov. Na konci školského roku sa trieda rozhodla ísť na výlet. Organizátor vedel, že 15 žiakov obľubuje turistiku a 21 žiakov plávanie. 9 žiakov sa chcelo zúčastniť na oboch podujatiach. Koľko žiakov:
 - a) pôjde len plávať,
 - b) sa zúčastní na podujatiach,
 - c) zostane na ubytovni?
2. **úloha:** Traja kamaráti Jano, Marek a Patrik majú spolu 51 kusov POGI. Jano má 2 krát toľko kusov ako Marek. Marekovi chýbajú 3 kusy, aby mal toľko ako Patrik. Koľko kusov POGI má každý z nich?
3. **úloha:** Chceme zmerať výšku pohára, no mám len 15 cm pero. Viem, že keď pero postavím do pohára, chýba mi po okraj toľko, koľko prečnieva, keď pero vložíme do pohára o polovicu nižšieho. Aká je výška pohára?

Komentár k úlohám:

1. **úloha** je klasickou slovnou úlohou o množinách s neprázdny prienikom. Kontext úlohy je postavený do bežného života triedy s využitím športových aktivít. Otázky sú zoradené v presnej nadväznosti a nesprávne vyriešenie predchádzajúcej spôsobuje tzv. tečenie chyby do nasledujúcej.
2. **úloha** — úloha o mnohosti. Objektom sú známe žetóny hry POGI, v súčasnosti veľmi obľúbenej medzi deťmi. V texte sa vyskytuje slovo „chýbajú“, ktoré deti veľmi citlivo vnímajú.
3. **úloha:** Problémová úloha z bežného života o porovnávaní. Táto úloha bola predložená žiakom len v písomnej podobe, pričom sme žiakom zdôraznili, aby si pri jej riešení pomohli nakreslením obrázku.

V analýze riešenia MSÚ žiakmi sme sa zamerali na chyby, ktoré vznikali v etape procesu zmocnenie sa textu žiakom a nájdenia riešiteľskej stratégie.

Pre skúmanie vplyvu transformácie zadania na schopnosť uchopiť matematický text pri riešení slovnej úlohy sme vybrali v troch triedach (dve klasické a jedna jazyková) v 6. ročníku na 2 cvičných ZŠ v Banskej Bystrici skupiny po desať žiakov (riešiteľov), ktorí riešili sadu 3. slovných úloh rôznou formou (slovne, písomne a písomne s priloženým obrázkom).

K týmto skupinám žiakov sme vybrali v každej triede po dvoch žiakoch- „rečníkoch“, schopných transformovať texty predložených slovných úloh do pútavej slovnej podoby, pri zachovaní matematického obsahu jednotlivých úloh.

V analýze záznamov ich riešení sme sa zamerali na chyby [1], ktorých sa dopúšťajú rečníci pri transformácii textu, ako aj riešitelia pri riešení zadaných úloh.

Pre študentov učiteľstva matematiky bol z pedagogického hľadiska veľmi podnetný výber žiakov — „rečníkov“. Pri určení rečníka a konkrétnych riešiteľov bolo potrebné zohľadniť viacero faktorov. Od statusu jednotlivcov v triede, až po konkrétne komunikačné schopnosti a intelektuálnu vyspelosť vybraných žiakov. Bolo potrebné vyhnúť sa komunikácii medzi nerovnocennými jedincami. Kvalita výberu samotného rečníka, ovplyvňuje realizáciu celého experimentu. Pre ucelenú informáciu o triede sme sa rozhodli použiť kombináciu rôznych metód. *Tri dotazníky*: Hádaj kto, Rozpovedz, Vysvetli a *osobný pohovor* s učiteľkami matematiky, ktorý nás upozornil na jedincov v triede s komunikačnými schopnosťami, pracujúcich samostatne. Nezávislé vyhodnotenie získaných údajov umožnilo objektívnejší výber rečníkov v triedach.

Scenár experimentu

Vlastný experiment sme realizovali podľa nasledovného scenára:

1. časť:

- komunikácia učiteľ — riešitelia úloh

Učiteľ zadá riešiteľom text MSÚ doplnený, ktorý obrázkom umožňuje protetické modelovanie v písomnej forme. Riešitelia riešia v časovom limite 10–15 min.

- komunikácia učiteľ — rečník

Učiteľ zadá dvom rečníkom v triede po jednom texte ďalšej MSÚ na dobu 5 min. Rečníci si dôkladne prečítajú text, pričom si môžu robiť poznámky. Po tomto čase odovzdávajú zadanie MSÚ a majú 5 minút na napísanie vlastného textu (vlastnej interpretácie zadanej úlohy). Pôvodné zadanie je im opäť predložené na konfrontáciu oboch textov.

2. časť: trieda je rozdelená na dve skupiny

- komunikácia rečník — riešitelia úloh

Rečník prečíta spolužiakom — riešiteľom dvakrát svoju verziu zadania slovnej úlohy. V prípade potreby ju môže aj zopakovať. Otázky zo strany riešiteľov nie sú povolené, ani dodatočné preformulovanie úlohy rečníkom. Riešiteľom je ponechaný čas 10–15 min na riešenie úlohy.

Dynamika príbehov vypracovaných rečníkmi bola oproti pôvodným textom výraznejšia. Vo veľkej miere niesla znaky rozprávky a napätia. Takto zdanlivo fádny príbeh zaujme už prostredím do ktorého je postavený, pričom agresívnosť v príbehu je vlastnejšia chlapcom.

U žiakov jazykovej triedy (6. A) sa v texte objavili prvky lepšie prezrádzajúce vzájomný súvis medzi objektami (napríklad: chudobnejší, ... majú niečo spoločné).

Pozorovali sme, že manipulácia so slovnou úlohou bez konkrétnej číselnej reprezentácie je u žiakov s nižšími jazykovými schopnosťami o mnoho náročnejšia. Často nesprávne interpretujú text na základe neúplne objasnenej situácie v úlohe, pričom zanedbávajú niektoré dôležité

fakty. Pri čítaní textu pozornosť upriamujú na matematické objekty (čísla) a tieto okamžite syntetizujú do celku. Už z prvého čítania sa snažili zachytiť situáciu.

Naproti tomu, žiaci, ktorých jazykové zručnosti sú vysoké, dokážu úlohu spracovať aj vo vysoko abstraktnej podobe (zdanlivo bez použitia matematického modelu). Text vnímajú ako celok, až neskôr si vyhodnocujú jasnú zmenu vo formulácii. Analyzujú a neskôr pre kontrolu syntetizujú. Po prvom čítaní zadania si väčšina z tejto skupiny nerobila poznámky.

Rečníci pozmenili zadané slovné úlohy takto:

6. A: **Gabriela:** Každoročne sa koná veľký snem bosoriek. V každom meste je ich približne 30. Konkrétne v Sydney je 28 bosoriek. Niektoré bosorky majú niečo spoločné. 15 bosoriek je plešatých s parochňami. 21 bosoriek malo hranaté nohy. 9 bosoriek má plešaté hlavy aj hranaté nohy. Koľko bosoriek má: a) len plešaté hlavy, b) plešaté hlavy, alebo hranaté nohy, c) koľko bosoriek je normálnych?
- Martin:** V banke lupiči Fero, Slivka a Jahoda ukradli spolu 51 balíčkov s peniazmi. fero ukradol 2 krát viac balíčkov s peniazmi ako Slivka. Slivka je chudobnejší o 3 balíčky s peniazmi aby mal toľko ako má Jahoda. Koľko balíčkov s peniazmi ukradol každý z nich?
6. B: **Radoslav:** V strašidelnom dome je 28 príšer. Na konci roka pán Drakula rozhodol, že sa pôjdu výnimočne zabaviť s ľuďmi. 15 príšer chcelo ľudí strašiť a 21 príšer chcelo ľuďom cicať krv. Koľko príšer chcelo: a) iba strašiť, b) sa zabaviť na strašení ľudí, alebo na cicaní krvi, c) zostať v strašidelnom dome.
- Patricia:** V jedno krásne snečné popoludnie sa stretli 3 psy. Volali sa Dunčo, Beny a Rexo. Rozhodli sa, že sa pôjdu poprechádzať. cestou našli 51 kostí. Dunčo, ako najstarší si zobral 2-krát viac kostí ako Beny. Beny si zobral o 3 kostičky menej ako Rexo. Koľko kostičiek sa ušlo každému z nich?

Aj keď jazykovo zdatnejší jedinci mali menší problém so zmocnením sa textu slovnej úlohy, je táto prednosť kompenzovaná zanášaním množstva hlavne numerických chýb do riešenia úlohy.

Trieda	Vyriešili správne [v %]	Riešili s chybou [v %]	Neriešili [v %]
Jazyková 6. A	$1 + 7 + 3 = 11/36, 7$	$8 + 3 + 4 = 15/50, 0$	$1 + 0 + 3 = 4/13, 3$
Klasická 6. B	$1 + 7 + 5 = 13/43, 3$	$8 + 4 + 0 = 12/40, 0$	$2 + 0 + 6 = 8/26, 7$
predexperiment 6. A	10,0 %	55,0 %	35,0 %

Pri podrobnejšom vyhodnotení chýb riešiteľov sme zistili, že kvalita rečníkovo prejavu ovplyvní riešenie, ale zo samotného úspechu, alebo neúspechu riešenia nemožno viniť rečníka.

Pri transformácii zadania z textovej na hovorovú formu sa rečníci dopustili nasledujúcich chýb:

- poskytli vo svojej interpretácii nápovedu,
- použili špeciálne slovné vyjadrenie ukrývajúce kľúč k riešeniu,
- nedostatočne objasnili vzťahy,
- nesprávne uchopili text.

Úspešnosť riešenia MSÚ zadaných v písomnej forme riešiteľom bola väčšia, ako pri úlohách zadaných slovne. Riešitelia spôsobili množstvo chýb v ich zápise.

Záver

Na Slovensku doposiaľ absentuje publikácia komplexne zahrňujúca poznatky a skúsenosti matematikov s oblasťou slovných úloh. Prístupné literárne zdroje sú publikované väčšinou vo forme článkov, či príspevkov v zborníkoch. Aby bol učiteľ matematiky schopný sa ďalej profesionálne

vzdelávať musí sa už počas vysokoškolského štúdia naučiť cielavedome pracovať s literatúrou. Príprava na realizáciu experimentu v školskej praxi preverila túto schopnosť u študentov učiteľstva matematiky. Obohatila ich onovú skúsenosť s využitím moderných metód vyučovania matematiky. Ako vyplynulo zo záverečných reflexií na priebeh experimentu, veľmi podnetné bolo množstvo experimentov, ktoré sa zaoberali problematikou komunikácie, pojmotvorného procesu a formalizmu v matematike. Negatívom z pohľadu študentov je veľká časová náročnosť vo fáze prípravy a vyhodnotenia experimentu počas semestra.

Realizácia nutných diagnostických meraní, tvorba videozáznamu riešenia slovných úloh a jeho následná analýza vytvorili cennú bázu pre vyučovanie didaktiky matematiky v úvodnom semestri pre nasledujúce ročníky. Skúsenosti so samostatným a efektívnym projektovaním učiva využili študenti v rámci tvorivých dielní v poslednom ročníku štúdia pri tvorbe pojmových máp a k hlbšiemu sa zamysleniu nad využitím integrovaného tematického vyučovania v matematike.

Literatura

- [1] Brincková, J.: Matematická olympiáda pre SOU a SOŠ. Pedagogické rozhľady, 1995, č. 5, s.17–20
- [2] Gardner, H.: Frames of Mind. New York: Basic Books 1983
- [3] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava SPN 1989
- [4] Stankovičová, D.: Vplyv transformácie na schopnosť uchopiť matematický text pri riešení slovných úloh. Diplomová práca. FPV UMB B. Bystrica 1999