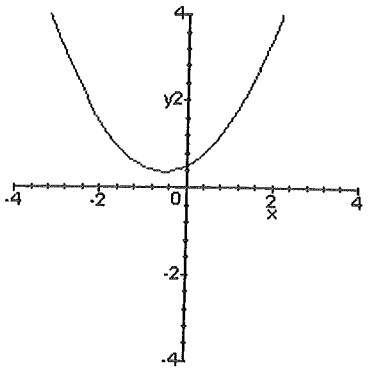
Použití grafických kalkulátorů ve výuce matematické analýzy — nespojité funkce

Milan Votava[1]

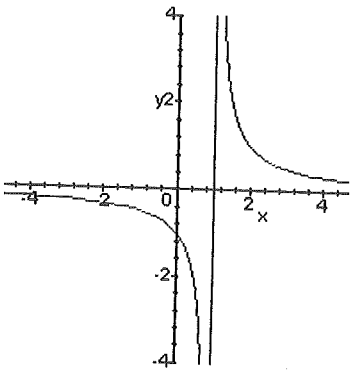
Pojem nespojitosti funkce, druhy bodů nespojitosti, pojmy limita funkce, limita zleva a zprava dělají často mnohým studentům i na vysoké škole potíže. I když jde převážně o učivo střední školy, jsou často vědomosti studentů v této části matematiky na poměrně nízké úrovni. Pokud chceme probírání tohoto učiva zpestřit ukázkou grafů nespojitých funkcí na obrazovce počítače, narazíme obyčejně na to, že počítač se „snaží" vykreslit i nespojitou funkci jako spojitou, takže graf, který dostáváme, není správný. Ukázky zobrazení grafů funkcí

$$y = \frac{x^3 - 1}{2 \cdot (x - 1)} \quad , \qquad y = \frac{1}{x - 1} \quad , \qquad y = \arctan \frac{1}{x - 1} \quad ,$$

sejmuté z obrazovky počítače, jsou na obr. 1–3 (Byl použit program MAPLE V, verze 4.00 c).

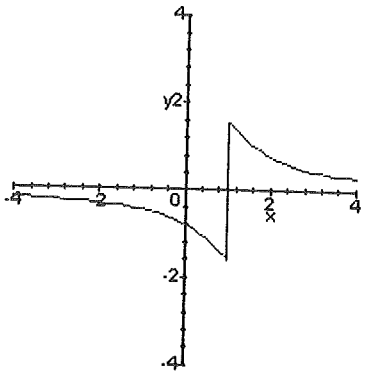


Obr. 1



Obr. 3

Obr. 2



[1](votava@osu.cz) Pedagogická fakulta OU, kat. matematiky s didaktikou, Českých legií 9, Ostrava 1, tel. (069)6160499

Jak je vidět, grafy na obr. 2, 3 nejsou zobrazeny správně (svislá přímka na obr. 2 není asymptota funkce, ale část grafu), graf na obr. 1 sice není možno považovat za chybný, ale pro dokreslení výkladu o nespojitých funkcích není vhodný.

Malá rozlišovací schopnost displeje grafických kalkulátorů, což se uvádí jako jedna z hlavních nevýhod oproti počítači, se zde ukazuje jako výhodná, protože při vhodné volbě rozsahu souřadnic na displeji je nespojitost funkce na grafu poměrně dobře viditelná. Před použitím ve vyučování je ovšem třeba zobrazení jednotlivých funkcí při různých rozsazích souřadnic předem vyzkoušet, aby výsledek splnil očekávání. Uvedu několik příkladů použití grafického kalkulátoru TI-83 (Texas Instruments), který jsem měl k dispozici, které ilustrují uvedené tvrzení. Jestliže tedy chceme zobrazit nespojitou funkci na uvedeném grafickém kalkulátoru, musíme zvolit, jak už bylo řečeno, vhodný rozsah. Nebudeme se zde zabývat technickou stránkou vytváření grafů funkcí na displeji a z toho plynoucími výpočty vhodných rozsahů souřadnic, ale omezíme se na praktické využití. K ilustraci učiva bude dostačující, pokud použijeme funkce, jejichž body nespojitosti mají celočíselné x-ové souřadnice. V tomto případě je vhodným „magickým číslem" 9,4 na ose x, které souvisí s rozlišovací schopností displeje. Jestliže tedy zvolíme rozsah roven tomuto číslu (např. $x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,7$) nebo jeho násobku, zobrazí se graf nespojité funkce nespojitě, pokud ale rozsah bude jiný, nemusí být nespojitost na displeji vidět.

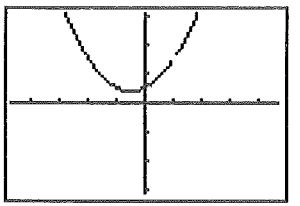
Zvolíme-li např. funkci

$$y = \frac{x^3 - 1}{2 \cdot (x - 1)}$$

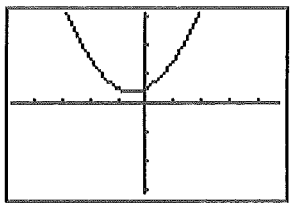
a rozsah pomocí tlačítka WINDOW:

$$x_{min} = -4,7, \qquad x_{max} = 4,7, \qquad y_{min} = -3,1, \qquad y_{max} = 3,1,$$

dostaneme graf, který je na obr. 4. Jak vidíme nespojitost funkce v bodě $x = 1$ je velmi dobře viditelná (uvedený rozsah zobrazení můžeme také nastavit pomocí tlačítka ZOOM a položky 4: Zdecimal). Při změně rozsahu (změníme např. x_{min} na hodnotu $x_{min} = -4,8$) se nespojitost již na grafu neobjeví (obr. 5).



Obr. 4

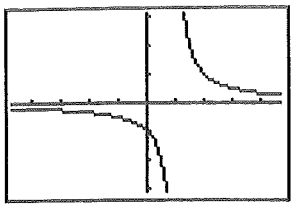


Obr. 5

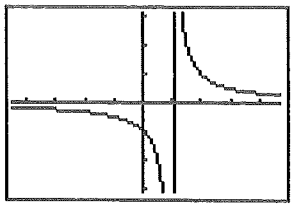
Podobné je to při zobrazení funkce

$$y = \frac{1}{x - 1} \quad \text{při rozsahu} \quad x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,7, y_{min} = -3,1, y_{max} = 3,1$$
$$\text{a rozsahu} \quad x_{min} = -4,5, x_{max} = 4,7, y_{min} = -3,1, y_{max} = 3,1.$$

Oba případy jsou na obr. 6 a obr. 7. (Svislá přímka na obr. 7 opět není asymptota, ale část grafu)



Obr. 6

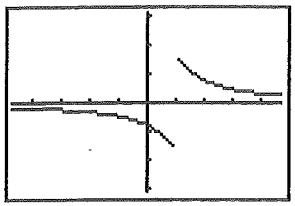


Obr. 7

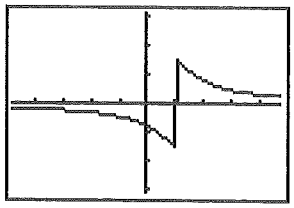
Obdobně např. funkce

$$y = \arctan \frac{1}{x-1}$$

se zobrazí při rozsahu $x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,7, y_{min} = -3,1, y_{max} = 3,1$ nespojitě (obr. 8) a např. při rozsahu $x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,5, y_{min} = -3,1, y_{max} = 3,1$ dostaneme v okolí bodu $x = 1$ chybný graf (obr. 9).



Obr. 8

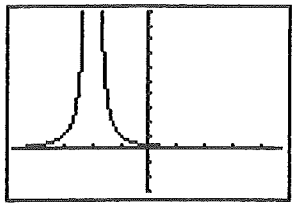


Obr. 9

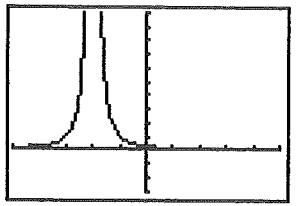
V případě, že jde o funkci, jejíž limita je ve (vlastním) bodě nespojitosti nevlastní, není třeba dávat pozor na rozsah zobrazení, protože „spojení grafu" je mimo displej. Na obr. 10 je zobrazena funkce

$$y = \frac{1}{(x+2)^2}$$

při rozsahu $x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,7, y_{min} = -3,1, y_{max} = 10$ a na obr. 11 je stejná funkce při rozsahu $x_{min} = -5, x_{max} = 5, y_{min} = -3,1, y_{max} = 10$. V obou případech graf odpovídá skutečnosti.



Obr. 10



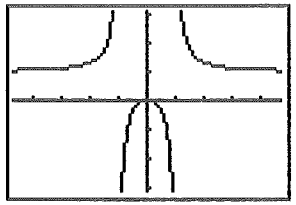
Obr. 11

Na grafech (obr. 4, 6, 8, 10, 12, 13) mohou studenti vidět různé druhy bodů nespojitosti. Odstranitelný bod nespojitosti je na obr. 4, bod nespojitosti I. druhu na obr. 8 a body nespojitosti II. druhu jsou na obr. 6, 10, 12 a 13. Na obr. 12 je graf funkce

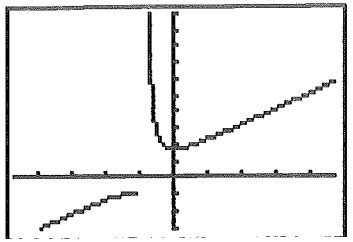
$$y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

a na obr. 13 je graf funkce

$$y = (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} - 1.$$



Obr. 12



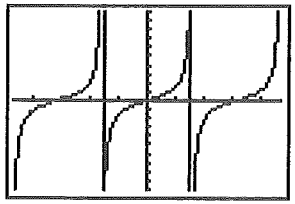
Obr. 13

Dále lze na těchto grafech ukázat geometrický význam limity, limity zleva, limity zprava, neexistence limity, pokud se limita zleva a zprava nerovná (obr. 6, 8) a naopak existence limity, pokud se jednostranné limity rovnají (obr. 4, 10). Myslím si, že je dobré ukázat i příklad, který ukazuje to, že limita zleva může být vlastní a limita zprava nevlastní (obr. 13). Tyto ukázky jistě přispějí k větší názornosti výkladu a hlubšímu pochopení tohoto učiva.

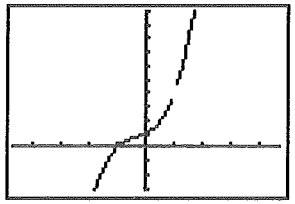
Že je třeba předem zvolit nejen vhodný rozsah, ale i vhodnou funkci, je vidět např. na obr.12. a 13 . Pro funkci $y = \tan x$ se mi nepodařilo najít takový rozsah, aby byla zobrazena v okolí bodů nespojitosti správně (na obr.12 je při rozsahu $x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,7, y_{min} = -10, y_{max} = 10$), a při zobrazení funkce

$$y = \frac{x^4-1}{x-1}$$

při rozsahu $x_{min} = -4,7, x_{max} = 4,7, y_{min} = -3,1, y_{max} = 10$ je „přerušení" grafu příliš velké a tedy k ilustraci učiva nepříliš vhodné.



Obr. 14



Obr. 15

Z uvedených příkladů je vidět, že použití grafických kalkulátorů není, v době počítačů s mnohem kvalitnějším zobrazením, nějakým anachronismem, ale že tyto kalkulátory mohou být mnohem levnější a dostupnější a někdy i vhodnější a názornější pomůckou při výuce některých partií matematické analýzy.

Literatura

[1] Manuál ke grafickému kalkulátoru TI–83

[2] BROŽKOVÁ, A.: Cvičení z matematické analýzy. 2. Vyd. Ostrava: PdF OU 1995. ISBN 80-7042-083-9

[3] JARNÍK, V.: Diferenciální počet I. 6. Vyd. Praha: Academia 1974.

[4] ROBOVÁ, J.: Vyšetřování vlastností elementárních funkcí s využitím grafického kalkulátoru. MFI roč.9, č. 4, s.233–237, č. 5, s 303–306. ISSN 1210-1761