# ROLE FUZZY MATEMATIKY V PEDAGOGICKÉM VÝZKUMU

ZDENĚK PŮLPÁN

Matematika nabízí humanitním vědám formální modely, ve kterých proměnné a parametry mohou mít rozdílnou interpretaci. Užití (říkáme také aplikace) modelu je pak věcí zkušenosti a většinou i znalostí mimomatematických, tedy v rukách pedagogů, psychologů, lékařů atd. Z toho vyplývá, že i v případě, kdy fungování jistého modelu je zajišťováno softwarem počítače, musí každý, kdo užívá matematických modelů, znát jeho základní strukturu, smysl a možnosti.

Jako příklad sledujme úlohu fuzzy matematiky při vytváření našich představ o průběhu pojmového učení. Tento proces známe jak z vlastních prožitků, tak i z vnějších projevů u řady jedinců.

Je-li objekt poznávání neznámý, jeví se nerozčleněný a také přesně neohraničený. Postupně, na základě smyslové aktivity se začíná objekt rozčleňovat, říkáme, že dochází ke strukturování. To vede k určení jistých podobjektů v části pozorovaného objektu. Vyčlenění jistých podobjektů je umožněno na základě některé vlastnosti např. smyslově nebo rozumově podmíněné, která se na objektu poznávání mění. V určitých částech objektu jsou změny pozorované vlastnosti větší resp. menší. Tam, kde je pozorován extrém, je lokalizováno tzv. jádro, na které se pak pozorování zaměří. Rozhodující pro jádro pak nebude jen jediná původní vlastnost, ale vlastnosti nové, přenesené zkušeností nebo na základě myšlení (např. vztah jádra a okolí). Tak dochází postupně ke změně představ o jádře. Ačkoliv jádro je určeno na základě extrému jedné určité vlastnosti, tato „vyčleňující" vlastnost nemusí být pro „určení" jádra trvalá nebo jediná. Ke změně původní vyčleňující vlastnosti může dojít skokem (v psychologii se pak mluví o vhledu). Pro další poznávací činnost jsou však vlastnosti důležitější než samotný objekt, ten je totiž postupně zástupný jinými „srovnatelnými" objekty. Vlastnosti nemusí být v mysli precizovány tak, že by byly jednoznačné v tom smyslu, že by vždy pro stejný podobjekt i u téhož jedince dávaly stejný výsledek. Vlastnosti však mají jisté charakteristiky chování, které se nemění. Ty jsou jádrem pro tvoření nových pojmů. Tak si dnes představujeme, že vznikaly podmínky pro jednu z nejdůležitějších abstrakcí, kterou kdy člověk udělal, k vytvoření pseudopojmu a pak pojmu čísla. Dnes ovšem člověk neprochází historickou cestou vzniku tohoto pojmu (kterou nazýváme cestou zdola), ale cestou, která je kombinací této cesty a cesty shora, tj. uvědomováním si oněch klíčových charakteristik vlastností.

To, co můžeme například popsat jen vágními slovy, můžeme vyjádřit „přesněji" i formálně matematicky.

Budeme předpokládat, že „pozorovaný" objekt je reprezentován množinou stejnorodých objektů E.

Mlhavost a neostrost vnímání $E$ se dá vyjádřit funkcí $\mu : E \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$, o které můžeme na samém začátku zkoumání předpokládat, že pro všechna $x \in E$ je

$\mu(x) = 0,5$. Vnímaná část se v mysli zobrazí nejprve jako fuzzy množina *M*:

$$M = \{(x/0,5);\ x \in E\}.$$

Prvotní poznání začíná i náhodně zvolenou fuzzy množinou $\sigma$ (kterou ve shodě s Brunerem nazveme ohniskem). To můžeme interpretovat tak, že původní funkce $\mu$ mění hodnoty na určitých prvcích z *E* tak, že pro některé prvky $x \in E$ je nová funkce $\mu_o\,(x)$ rovna 1, pro ostatní je $0 \leq \mu_o\,(x) < 1$ (tzv. strukturování).

Ohnisko je tedy fuzzy množinou $\sigma$

$$\sigma = \{(x\ \mu_o\,(x)\,);\ x \in E\}.$$

Další zkoumání se koncentruje okolo jádra fuzzy množiny $\sigma$ ,které můžeme ztotožnit s množinou

$$J_o = \{x \in E\ ;\ \mu_o\,(x) = 1\}.$$

Jen v množině $J_o$ se pak hledají relace r, s,... Výsledek můžeme charakterizovat relačním modelem D

$$D = [\,J_o;\ \{\,r, s, \ldots\,\}].$$

Jádro však bývá množina s relativně malým počtem prvků vzhledem k základní množině E. Následují proto hypotézy o splnitelnosti predikátů $P_r$, $P_s$,... definujících relace r, s,... v $J_o$ i na dalších prvcích z E s vyššími hodnotami funkce $\mu_o$ . Jejich formálním vyjádřením je relační fuzzy model $T(J_o\,)$

$$T(J_o\,) = [\,E\ ;\ \{\,R, S, \ldots\,\}],$$

kde R, S,... jsou fuzzy relace v E.

Myšlenkové procesy mají vliv i na jinou změnu fuzzy modelu $T(J_o\,)$. Mění se struktura modelu D změnou predikátů $P_r$ , $P_s$... , které definovaly relace r, s,... v $J_o$. Nový fuzzy model je pak odvozen z jiného modelu D.

Každá změna fuzzy modelu $T(J_o)$ může snižovat indexy neostrosti fuzzy relací R, S,... z $T(J_o)$.

Každou fuzzy množinu můžeme reprezentovat posloupností klasických množin s prvky o věrohodnosti větší než $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$ Proto ve fuzzy modelech $T(J_o\,)$ jsou zobecněny zkušenosti s různými klasickými modely D. Každý fuzzy model $T(J_o\,)$ si tedy můžeme představit jako posloupnost klasických modelů $T^n(J_o)$ s relacemi, jejichž prvky mají věrohodnost větší než $\alpha_n$ .

Fuzzy model $T(J_o)$ můžeme v souladu s Vygotským nazvat fuzzy komplex nebo také fuzzy pojem.

Rozsah pojmu, reprezentovaného ve vědomí modelem $T(J_o)$ je dán fuzzy množinou

$$H = \{x/\ \mu_J\,(x));\ x \in E \wedge \mu_H\,(x) = \min\,(\mu_R\,(x)\ \mu_S\,(x), \ldots\,)\}$$

a obsah souborem fuzzy relací

$$\{R,S,...\} \text{ z } T(J_o).$$

Cesta opačná je cestou hledání významu k danému modelu v určité jeho reprezentaci (teoreticko - formální, verbální v přirozeném jazyce, grafické atd.). Charakteristické funkce

použitých jazykových proměnných a jazykových výrazů se po každém pokusu o interpretaci modelu v realitě mění od určitých počátečních subjektivních hodnot k hodnotám objektivním.

Jsou-li nyní naše představy formalizovány, lze uskutečnit (upozorňuji, velmi rozsáhlý nákladný) experiment, ověřující model. Základním diagnostickým prostředkem je sada vhodně volených testů. Každá testová položka reprezentuje buď prvky z E nebo relace v E nebo vztahy složitější (relace v relacích,...). Míra splnění těchto položek je pak zdrojem pro určení míry věrohodnosti. Z časové posloupnosti jednotlivých měření lze sledovat změny v chápání relací, majících vztah k danému pojmu. (Dalším matematickým problémem je zpracování časové řady takových experimentů.)

Každá fuzzy množina nám reprezentuje informaci obsaženou ve funkci náležitosti $\mu$. Zřejmě závisí na rozsahu základní množiny E a příslušných hodnotách $\mu$ na E. Ve velmi zjednodušeném případě můžeme zavést jednorozměrnou hodnotu odhadu množství informace $I_A$ ve fuzzy množině A vztahem

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} [2 \max(\mu_A(x_i), 1 - (\mu_A(x_i)) - 1], x_i \in E.$$

Pak je zřejmě $0 \leq I_A \leq n$.

Pomocí $I_A$ můžeme sice jednoduše, ale dost hrubým způsobem sledovat (i v závislosti na čase) vytváření příslušné představy (sémantizaci pojmu).

Literatura:

[1] Půlpán, Z.: Základy informační analýzy didaktického nebo psychologického experimentu, Gaudeamus 1992, 96 str.

[2] Půlpán, Z.: K problematice vágnosti v humanitních vědách, Studie 2/1997, Academia, Praha, AV ČR

AUTOR – KONTAKT:

Prof. RNDr. PhDR. Zdeněk Půlpán, CSc.,
katedra matematiky Pedagogické fakulty VŠP
Hradec Králové